

Project

takumi ogasawara

2025 年 8 月 6 日

Definition 1. α が level u の型である (Type u) であるとは, α が宇宙 u に属することである.

すべての項あるいは式 (Expressions) は型 (Type) を持つ.

Definition 2. Type u である α が単位元を持つ (One) であるとは, 以下の性質を満たすことである.

$$\exists \text{one} : \alpha \quad (1)$$

この α 型の one を 1 と書き, これを単位元と呼ぶ.

以降, α と 1 の関係を明記したい場合, これを α と 1 の組 $(\alpha, 1)$ を用いて $\alpha = (\alpha, 1)$ と記述する.

また, 1 が単位元を持つ α の単位元であることを明記したい場合, これを 1_α と記述する.

(注意) 上記における 1 とは単位元という名前を持つ元があるということだけを保証しているに過ぎない. つまり α が One 型であるとは 1 という α 型の値を持つだけで, その性質は定義していない.

Definition 3. Type u である α が逆元を持つ (Inv) であるとは, 関数 Inv について以下の性質を満たすことである.

$$\exists \text{inv} : \alpha \rightarrow \alpha \quad (2)$$

この $\alpha \rightarrow \alpha$ 型の関数 inv について, $\text{inv } \alpha$ を α^{-1} と書き, これを逆元と呼ぶ.

(注意) 上記における inv は α に対して α^{-1} を対応させているだけに過ぎない. つまり α が Inv 型であるとは α^{-1} という $\alpha \rightarrow \alpha$ 型の値を持つだけで, その性質は定義していない.

Definition 4. Type u である α が乗法 $\cdot$ で閉じている (Mul) であるとは, 二項関数 $\cdot$ について以下の性質を満たすことである.

$$\exists \cdot : \alpha \times \alpha \rightarrow \alpha \quad (3)$$

この $\cdot$ を乗法演算子と呼ぶ.

以降, α と $\cdot$ の関係を明記したい場合, これを α と $\cdot$ の組 $(\alpha, \cdot)$ を用いて $\alpha = (\alpha, \cdot)$ と記述する.

また, $\cdot$ が乗法で閉じている α の乗法演算子であることを明記したい場合, これを $\cdot_\alpha$ と記述する.

Definition 5. Type u である G が**半群 (Semigroup)** であるとは, $G = (G, \cdot)$ が乗法で閉じていて, かつ以下の性質を満たすことである.

$$\forall a, b, c \in G, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad (4)$$

また, 半群 $(G, \cdot_G), (G', \cdot_{G'})$ が等しいとは, 型 G, G' が等しく, また乗法演算子 $\cdot_G, \cdot_{G'}$ が等しいということである.

つまり, 以下を満たすことである (外延性).

$$G = G' \quad (5)$$

$$\forall a, b \in G; a \cdot_G b = a \cdot_{G'} b \quad (6)$$

Definition 6. Type u である G が**乗法単位元を持つ (MulOneClass)** であるとは, $(M, \cdot, 1)$ が単位元を持ち, $(M, \cdot, 1)$ が乗法で閉じていて, かつ以下の性質を満たすことである.

$$\forall a \in M, 1 \cdot a = a \cdot 1 = a \quad (7)$$

Definition 7. Type u である M が**モノイド (Monoid)** であるとは, $(M, \cdot_M, 1_M)$ が半群で, $(M, \cdot_M, 1_M)$ が乗法単位元を持ち, かつ以下の性質を満たすことである.

$$\text{npow} : \mathbb{N} \times M \rightarrow M \quad (8)$$

$$\forall x \in M; \text{npow}(0, x) = 1_M \quad (9)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in M; \text{npow}(n+1, x) = \text{npow}(n, x) \cdot_M x \quad (10)$$

Definition 8. A が, 単位元を持つ $(M, 1_M), (N, 1_N)$ の組 (M, N) の **OneHom** であるとは, A が以下の性質を満たすことである.

$$\text{toFun} : M \rightarrow N \quad (11)$$

$$\text{toFun}(1_M) = 1_N \quad (12)$$

Definition 9. A が, 乗法で閉じている $(M, \cdot_M), (N, \cdot_N)$ の組 (M, N) の **MulHom** であるとは, A が以下の性質を満たすことである.

$$\text{toFun} : M \rightarrow N \quad (13)$$

$$\forall x, y \in M, \text{toFun}(x \cdot_M y) = \text{toFun}(x) \cdot_N \text{toFun}(y) \quad (14)$$

MulHom である (M, N) を $M \rightarrow_n^* N$ と略記する.

Definition 10. A が、乗法単位元を持つ $(M, \cdot_M, 1_M), (N, \cdot_N, 1_N)$ の組 (M, N) の **MonoidHom** 型であるとは、 A が組 (M, N) の **OneHom** で、 A が組 (M, N) の **MulHom** であることである。

(M, N) の **MonoidHom** を $M \rightarrow *N$ と略記する。また、 $M \rightarrow *N$ 型の値をモノイド準同型と呼ぶことにする。

Definition 11. A が、**Type u** である α の **Set** 型であるとは、 A が $\alpha \rightarrow \text{Prop}$ 型の関数であることである。

数学的に $a \in M$ であることと、Lean4 において $\alpha : \text{Set } M = M \rightarrow \text{Prop}$ 型から $\alpha a = \text{True}$ であることは同値である。

Definition 12. A が、**Type*** であり乗法で閉じている $M = (M, \cdot)$ の**部分半群 (Sub-semigroup)** 型であるとは、 A が以下の性質を満たすことである。

$$\exists \text{carrier} : \text{Set } M \quad (15)$$

$$a, b \in \text{carrier} \Rightarrow a * b \in \text{carrier} \quad (16)$$

Definition 13. A が、**Type*** であり乗法単位元を持つ $M = (M, \cdot_M, 1_M)$ の**部分モノイド (Submonoid)** 型であるとは、 A が M の部分半群であり、かつ以下の性質を満たすことである。

$$1_M \in \text{carrier} \quad (17)$$

Definition 14. A が、**Type*** であり群である G の**部分群 (Subgroup)** 型であるとは、 A が G の部分モノイドであり、かつ以下の性質を満たすことである。

$$x \in \text{carrier} \Rightarrow x^{-1} \in \text{carrier} \quad (18)$$

Definition 15. モノイド M, N 、モノイド準同型 $f : M \rightarrow N$ に対して、 N' を N の最小の部分モノイドとしたとき、 f の核 $\ker f$ は以下のように定義される。

$$\ker f := f^{-1}(N') \quad (19)$$

Definition 16. **Type u** である A 、**Type v** である B の組 (A, B) が **HasQuotient** 型であるとは、以下の性質を満たすことである。

Definition 17. A/B

Definition 18. **Sort*** である ι 、**Type*** である α に対し、 $f : \iota \rightarrow \alpha$ の **range** とは、**Set** α 型であり、 $y \in \iota, x \in \alpha$ に対して **Prop** 型 $\{x \mid \exists y, f y = x\}$ を返す関数である。

Definition 19. $f : G \rightarrow *N$ の range とは, N の部分群型であり, Definition18の意味で「 G の部分群の中で最大のものを集合と見做したもの」の f の range に N の部分群型の性質を与えたものである.

これを $\text{range}(f)$ と書くことにする.

Definition 20. A が, Sort^* である α と Sort^* である β の組 (α, β) の Equiv 型であるとは, A が以下の性質を満たすことである.

$$\text{toFun} : \alpha \rightarrow \beta \quad (20)$$

$$\text{invFun} : \beta \rightarrow \alpha \quad (21)$$

$$\forall x, \text{invFun}(\text{toFun}(x)) = x \quad (22)$$

$$\forall y, \text{toFun}(\text{invFun}(y)) = y \quad (23)$$

(α, β) の Equiv を $\alpha \simeq \beta$ と略記する.

Definition 21. A が, 乗法で閉じている $M = (M, \cdot), N = (N, \cdot)$ の組 (M, N) の同型 (MulEquiv) 型であるとは, A が (M, N) の $\text{Equip}(M \simeq N)$ 型であり, A が (M, N) の $\text{MonoidHom}(M \rightarrow_n^* N)$ 型であることである.

(M, N) の MulEquiv を $M \simeq *N$ と略記する.

Definition 22. G, G' を群とし, $\phi : G \rightarrow G'$ を群準同型とする. この時,

$$G / \ker \phi \cong \phi(G) \quad (24)$$

が成り立つ.

Proof. $G / \ker \phi \simeq * \text{range}(\phi)$ 型の A を定義する.

このとき A は定義より以下の条件

$$G / \ker \phi \text{ が乗法で閉じている} \quad (25)$$

$$\text{range}(\phi) \text{ が乗法で閉じている} \quad (26)$$

を満たすとき, 以下の性質を持つ.

[Equiv]

$$\text{toFun} : M \rightarrow N \quad (27)$$

$$\text{invFun} : N \rightarrow M \quad (28)$$

$$\forall x, \text{invFun}(\text{toFun}(x)) = x \quad (29)$$

$$\forall y, \text{toFun}(\text{invFun}(y)) = y \quad (30)$$

[MonoidHom]

$$\text{toFun} : M \rightarrow N \quad (31)$$

$$\text{toFun}(1_M) = 1_N \quad (32)$$

$$\forall x, y \in M, \text{toFun}(x \cdot_M y) = \text{toFun}(x) \cdot_N \text{toFun}(y) \quad (33)$$

$(G / \ker \phi \rightarrow * \text{range}(\phi))$ 型の関数 (すなわちモノイド準同型な $f : G / \ker \phi \rightarrow \phi(G)$) を MulEquiv の toFun 関数とする.

この f は (rangeKerLiftInjective ϕ と rangeKerLiftSurjective ϕ より) 全単射であるため [Equiv] を満たし, モノイド準同型 [MonoidHom] を満たす.

以上より全単射かつモノイド準同型な関数 f によって $G / \ker \phi \simeq * \text{range}(\phi)$ 型の A を定義できたため, 全単射かつモノイド準同型な関数 f について準同型定理が成り立つ. □